Interrogation n°4 – Structures algébriques
(sujet A) Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit E un ensemble et $\top$ une l.c.i. sur E. Que doit vérifier un élément e de E pour être un élément neutre pour $\top$? cf cours.

2. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a, b \in G$. Résoudre l'équation $ax^{-1}b^{-1} = b$ d'inconnue $x \in G$. On développera au maximum l'expression finale pour faire disparaitre toute parenthèse.

$$\begin{aligned} ax^{-1}b^{-1} = b &\iff ax^{-1} = b^2 \iff x^{-1} = a^{-1}b^2 \\ &\iff x = (a^{-1}b^2)^{-1} = (b^2)^{-1}(a^{-1})^{-1} = b^{-2}a \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe. Montrons que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. (On a clairement $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$)
   — Montrons que $0 \in n\mathbb{Z}$, i.e. qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 = n \times k$. On remarque que $k = 0$ convient, donc $0 \in n\mathbb{Z}$.
   — Soit $x, y \in n\mathbb{Z}$. Montrons que $x - y \in n\mathbb{Z}$. On sait qu'il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = nk$ et $y = nk'$. Donc $x - y = n(k - k') = nk''$ avec $k'' = k - k' \in \mathbb{Z}$. D'où $x - y \in n\mathbb{Z}$.

   Finalement, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, d'où $(n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

Interrogation n°4 – Structures algébriques

(sujet B) Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit E un ensemble et $\top$ une l.c.i. sur E d'élément neutre e. Que doit vérifier un élément x de E pour être symétrisable pour $\top$?

   cf cours.

2. Soit $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $f : G \to G'$ une application. Que doit vérifier f pour être un morphisme ? un isomorphisme ? un endomorphisme ? cf cours.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe. cf TD